Calcul approché d'intégrales.

On souhaite calculer des intégrales du type $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $\int_a^b f(t)\,w(t)\,dt$ qui peuvent par exemple être une réécriture sous forme intégrale $u(t) = u_0 + \int_0^t f(u)\,du$ de systèmes différentiels $u'(t) = f(t)$.

I) Formules de quadrature simples.

On considérera des fonctions f continues ou même plus régulières et des poids w continus au moins (et toujours > 0 sur $]a, b[$).

On souhaite avoir :

$$\int_a^b w(t) f(t)\,dt \simeq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

1) Formules simples.

a) Méthode des rectangles à gauche

Pour une subdivision $a = x_0 < \dots, x_{n+1} = b$ on note

$$I_n^{RG} = \sum_{j=0}^{n} (x_{j+1} - x_j)\, f(x_j)\, w(x_j)$$

Proposition : Lorsque $\max_{i \in [\![0,n]\!]} |x_{j+1} - x_j|$ tend vers 0,

$$I_n^{RG} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\, w(t)\,dt.$$

Ici $\lambda_j = (x_{j+1} - x_j)\, w(x_j)$.

Démonstration :

On a : $I_n^{RG} - \int_a^b w(t) f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [f(x_j)\, w(x_j) - f(t)w(t)]\,dt$

Or fw est uniformément continue sur $[a, b]$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$,

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |(fw)(x) - (fw)(y)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi lorsque $\max_{i \in [\![0,n]\!]} |x_{j+1} - x_j| \leq \delta$, pour tout $t \in [x_j, x_{j+1}]$, $|f(x_j)\, w(x_j) - f(t)\, w(t)| \leq \varepsilon$

ce qui donne :

$$\left| I_n^{RG} - \int_a^b f(t)\, w(t)\,dt \right| \leq \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varepsilon \leq (b-a)\varepsilon.$$

b) Formule du point milieu.

Ici :

$$I_n^{M} = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)(x_{j+1} - x_j)\, w\left[\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right].$$

Le même type de démonstration mène à la convergence.

c) Formule des trapèzes.

Ici :

$$I_n^{T} = \sum_{j=0}^{n} \frac{w(x_j) f(x_j) + f(x_{j+1})\, w(x_{j+1})}{2} (x_{j+1} - x_j)$$

d) ... de Simpson.

d) Formule de Simpson.

$$I_n^S = \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{w(x_j) f(x_j) + 4 f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) w\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right) + f(x_{j+1}) w(x_{j+1})}{6} \right] \times (x_{j+1} - x_j)$$

Les démonstration de convergence sont analogues en remarquant que ce sont des combinaisons linéaires de a) et b).

2) Ordre d'une formule de quadrature.

Definition: L'ordre d'une formule est le plus grand entier m pour lequel :

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_i P(x_j) = \int_a^b P(x) w(x) \, dx$$

pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$.

Notons $\Phi_\ell(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$

et $\varphi_\ell : \mathbb{R}_m[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $\ell = 0, \dots, n$.
$P \longmapsto P(x_\ell)$

La famille $\Phi_0, \dots, \Phi_n$ est la base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $\varphi_\ell(\Phi_{\ell'}) = \delta_{\ell,\ell'}$.

(φ_ℓ) est donc la base duale (Φ_ℓ).

Ainsi, lorsqu'une formule est d'ordre m, en remplaçant P par Φ_ℓ dans la définition:

$$\lambda_\ell = \int_a^b \Phi_\ell(x) w(x) \, dx.$$

et dans ce cas, comme tout polynôme de degré n est combinaison linéaire de $\Phi_0, \dots, \Phi_n$, comme la formule est exacte pour $\Phi_0, \dots, \Phi_n$, par linéarité, elle est vraie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $m \geq n$. Le cas $n = m$ fournit donc les formules de quadrature :

Proposition: Il existe une formule de quadrature d'ordre au moins n. Elle est fournie par :

$$\lambda_\ell = \int_a^b \Phi_\ell(x) w(x) \, dx \quad \ell = 0, \dots, n$$

où $\Phi_0, \dots, \Phi_n$ est la base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$.

II) Formules gaussiennes.

On démontre dans cette partie l'existence d'une formule à $n+1$ points, d'ordre $2n+1$.

Les points x_j, $j = 0, \dots, n$ sont les racines des $n+1$ polynôme orthogonal pour $(\cdot \mid \cdot)_w$.

Sandrine CARUSO

Méthodes de Gauss.

Référence : Demailly

Les méthodes d'intégration de Gauss consistent en une approximation du type

$$\int_\alpha^\beta f(x)w(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j) \tag{1}$$

où $w : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}_+^*$ est continue, et $\int_\alpha^\beta w(x)dx < +\infty$ (fonction poids). On le théorème suivant :

Théorème (Polynômes orthogonaux)**.** *On note $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ le produit scalaire dé ni par*

$$\langle f,g\rangle_w = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)w(x)\,dx.$$

Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$, et telle que $\deg P_n = n$ pour tout n. De plus, chacun de ces polynômes a toutes ses racines réelles et distinctes.

Ces propriétés permettront de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Méthodes de Gauss)**.** *Il existe deux uniques familles de réels $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant l}$ et $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant l}$ telles que la méthode de Gauss* (1) *soit d'ordre $2l+1$. Les x_i sont alors les racines du $l+1$-ième polynôme orthogonal pour w.*

Unicité. Supposons que $x_0,\dots,x_l$ et $\lambda_0,\dots,\lambda_l$ donnent lieu à une méthode d'ordre au moins $2l+1$. Posons

$$\pi_{l+1} = \prod_{i=0}^{l}(X-x_i).$$

Alors $\deg \pi_{l+1} = l+1$, donc pour tout $P\in\mathbb{R}_l[X]$, $\deg P\pi_{l+1} = 2l+1$. Puisque la méthode est d'ordre $2l+1$,

$$\int_\alpha^\beta P(x)\pi_{l+1}(x)w(x)\,dx = \sum_{j=0}^{l}\lambda_j P(x_j)\pi_{l+1}(x_j) = 0$$

car les x_j sont les racines de π_{l+1}. Ainsi, π_{l+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$, et comme il est unitaire, c'est *le* $l+1$-ième polynôme orthogonal pour w. D'où l'unicité des x_j. Calculons maintenant les λ_j. Soient $L_i\in\mathbb{R}_l[X]$ les polynômes élémentaires d'interpolation

de Lagrange en les x_j : $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. Comme ils sont de degré plus petit que $2l+1$, la méthode est exacte pour ces polynômes.

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{l}\lambda_j L_i(x_j) = \int_\alpha^\beta L_i(x)w(x)\,dx$$

ce qui détermine entièrement les λ_i.

Existence Soit maintenant π_{l+1} le $l+1$-ième polynôme orthogonal pour w, soient $x_0,\dots,x_l$ ses racines, et en dé nissant alors L_i comme ci-dessus, on pose

$$\lambda_i = \int_\alpha^\beta L_i(x)w(x)\,dx.$$

Montrons qu'alors la méthode est d'ordre $2l+1$. Tout d'abord, pour $P\in\mathbb{R}_l[X]$, P est égal à son polynôme d'interpolation de Lagrange $\sum_{i=0}^{l}P(x_i)L_i(x)$, et par conséquent,

$$\int_\alpha^\beta P(x)w(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \sum_{i=0}^{l}P(x_i)L_i(x) = \sum_{i=0}^{l}P(x_i)\lambda_i$$

par dé nition des λ_i, ce qui assure que la méthode est d'ordre au moins l. Si, maintenant, $P\in\mathbb{R}_{2l+1}[X]$, on écrit sa division euclidienne par π_{l+1} :

$$P = Q\pi_{l+1} + R$$

avec $\deg R\leqslant l$, et comme π_{l+1} est de degré $l+1$ et P de degré au plus $2l+1$, $\deg Q\leqslant l$. Ainsi, d'une part,

$$\int_\alpha^\beta P(x)w(x)\,dx = \int_\alpha^\beta Q(x)\pi_{l+1}w(x)\,dx + \int_\alpha^\beta R(x)w(x)\,dx = \int_\alpha^\beta R(x)w(x)\,dx$$

car π_{l+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$ par dé nition, d'autre part,

$$\sum_{j=0}^{l}\lambda_j P(x_j) = \sum_{j=0}^{l}\lambda_j Q(x_j)\pi_{l+1}(x_j) + \sum_{j=0}^{l}\lambda_j R(x_j) = \sum_{j=0}^{l}\lambda_j R(x_j)$$

car $\pi_{l+1}(x_j) = 0$ pour tout j. On a bien l'égalité voulue, ce qui montre que la méthode est d'ordre au moins $2l+1$. Il reste à montrer qu'elle est d'ordre exactement $2l+1$, et pour cela, à exhiber un polynôme de degré $2l+2$ pour lequel elle n'est pas exacte. C'est le cas de π_{l+1}^2 :

$$\int_\alpha^\beta \pi_{l+1}(x)^2 w(x)\,dx > 0$$

car la fonction intégrée est positive et pas presque partout nulle, mais en revanche,

$$\sum_{j=0}^{l}\lambda_j\pi_{l+1}(x_j)^2 = 0.$$