Corrigé ENS Cachan concours 3A analyse numérique 2010.

Partie I :

1) a) La fonction f étant analytique pour tous $x, y \in I$,

$$f(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k.$$

Par analyticité, cette série est dérivable à n'importe quel ordre (convergence normale) et on a :

$$f'(y) = f'(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(y-x)^k$$ de sorte que :

$$\frac{f'(y)}{f'(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} \frac{1}{f'(x)} (y-x)^k.$$

On a donc :

$$\left|\frac{f'(y)}{f'(x)} - 1\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \left|\frac{1}{f'(x)} \frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}\right|^{\frac{k}{k}} (y-x)^k.$$

ce qui donne, par définition de $\alpha(x)$,

$$\left|\frac{f'(y)}{f'(x)} - 1\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\, v^k = \frac{1}{(1-v)^2} - 1$$

②

par dérivation de $\sum_{k=0}^{+\infty} v^k = \frac{1}{1-v}$ (convergence normale pour les séries entières)

Or, comme $0<v < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 < \frac{1}{(1-v)^2} - 1 < 1$

donc, en écrivant :

$$\left|\frac{f'(x)}{f'(y)}\right| = \left|\frac{1}{1-\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right)^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right|^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-v)^2}-1\right)^k$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{(1-v)^2}-1\right)} = \frac{(1-v)^2}{1-4v+2v^2}$$

donc $\left|\frac{f'(x)}{f'(y)}\right| \leq \frac{(1-v)^2}{p(v)}$.

b) On a à nouveau par analyticité en développant $f^{(k)}(y)$, pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{f'(y)}\frac{f^{(k)}(y)}{k!} = \frac{1}{f'(y)} f'(x) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{f'(x)} \frac{f^{(k+l)}(x)}{k!\,l!}(y-x)^l$$

ce qui donne :

$$\left|\frac{1}{f'(y)}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\right| \leq \left|\frac{f'(x)}{f'(y)}\right| \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\left|\frac{1}{f'(x)}\frac{f^{(k+l)}(x)}{(k+l)!}\right|(y-x)^l$$

puis, par la question précédente

$$\left|\frac{1}{f'(y)}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\right| \leq \frac{(1-v)^2}{\psi(v)}\alpha(x)^{k-1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\underbrace{\alpha(x)^l|y-x|^l}_{v^l}$$

car $\left|\frac{1}{f'(x)}\frac{f^{(k+l)}(x)}{(k+l)!}\right| \leq \alpha(x)^{k+l-1}$ pour tout l.

Si on dérive $\frac{1}{1-v}=\sum_{k=0}^{\infty} v^k$ k fois, on obtient :

$$\frac{k!}{(1-v)^{k+1}} = \sum_{l=0}^{+\infty}(l+k)\times\cdots\times(l-(k-1))\,v^l$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(l+k)!}{l!}v^l \quad \text{ce qui donne}$$

finalement :

$$\left|\frac{1}{f'(y)}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\right| \leq \frac{(1-v)^2}{\psi(v)}\alpha(x)^{k-1}\frac{1}{(1-v)^{k-1}}\frac{1}{(1-v)^2}$$

puis en prenant la racine $(k-1)$-ième et en passant au sup :

$$\alpha(y) \leq \frac{1}{(1-v)\,\psi(v)}\alpha(x).$$

On écrit maintenant que :

$$\left|\frac{f(y)}{f'(y)}\right| \leq \left|\frac{f'(x)}{f'(y)}\right|\left|\frac{f(y)}{f'(x)}\right| \leq \frac{(1-v)^2}{\psi(v)}\left|\frac{f(y)}{f'(x)}\right|.$$

Majorons ce second terme :

$$\frac{f(y)}{f'(x)} = \frac{f(x)}{f'(x)} + (y-x) + \sum_{k=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x)}{f'(x)\,k!}(y-x)^k}_{|\cdot| \leq \alpha(x)^{k-1}|y-x|^k}$$

donne, comme dans les majorations précédentes,

$$\left|\frac{f(y)}{f'(x)}\right| \leq \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| + |y-x| + \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha(x)^{k-1}|y-x|^k$$

$$\leq \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| + |y-x|\Big[\underbrace{1+\left(\frac{1}{1-w}-1\right)}_{=\frac{1}{1-w}}\Big]$$

Finalement :

$$\left|\frac{f(y)}{f'(y)}\right| \leq \frac{(1-w)^2}{\psi(w)}\left[\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| + \frac{|y-x|}{1-w}\right]$$

2) a) On a, pour $y \in \left]\tilde{x}-r, \tilde{x}+r\right[$, $\phi'(y) = \dfrac{f(y)\,f''(y)}{(f'(y))^2}$.

Ceci se réécrit :

$$|\phi'(y)| \leq \left|\frac{f''(y)}{f'(y)}\right| \left|\frac{f(y)}{f'(y)}\right|$$

$$\leq 2\,|\alpha(y)| \left|\frac{f(y)}{f'(y)}\right|.$$

Ainsi, par 1) b),

$$|\phi'(y)| \leq 2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\gamma(\nu)} |\alpha(y)| \left| \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})} \right| + \frac{(1-\nu)}{\gamma(\nu)} |\alpha(y)| |y - \tilde{x}| \right]$$

$$\leq 2 \left[\frac{(1-\nu)}{\gamma(\nu)^2} \underbrace{|\alpha(\tilde{x})| \left| \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})} \right|}_{\leq \alpha_0} + \underbrace{\frac{|\alpha(\tilde{x})|}{\gamma(\nu)^2} \overbrace{|y - \tilde{x}|}^{\leq r}}_{\leq \nu_0} \right]$$

$$\leq 2 \, \frac{(1-\nu_0)\,\alpha_0 + \nu_0}{\gamma(\nu_0)^2}.$$

b) Erreur d'énoncé : il faut $[\tilde{x}-r, \tilde{x}+r]$ ou renforcer les hypothèses

Montrons que ϕ est une application de $[\tilde{x}-r, \tilde{x}+r]$ dans lui-même et λ-contractante.

* Soit $y \in [\tilde{x}-r, \tilde{x}+r]$. On a :

$$|\phi(y) - \tilde{x}| \leq |\phi(y) - \phi(\tilde{x})| + |\phi(\tilde{x}) - \tilde{x}|$$

$\downarrow$ accroissements finis

$$\leq \left[\sup_{\eta \in [y, \tilde{x}]} |\phi'(\eta)| \right] |y - \tilde{x}| + \left| \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha(\tilde{x})} \left[\lambda\, r\, |\alpha(\tilde{x})| + \alpha(\tilde{x}) \frac{|f(\tilde{x})|}{|f'(\tilde{x})|} \right]$$

$$\leq \frac{1}{\alpha(\tilde{x})} \left[\lambda \nu_0 + \alpha_0 \right]$$

Or, par hypothèse, $\lambda r_0 + r_0 \leq r_0$ donc :

$$\left|\phi(y) - \tilde{x}\right| \leq \frac{1}{\varphi(\tilde{x})} r_0 = r \quad \text{c'est à dire :}$$

$$\phi(y) \in \left[\tilde{x} - r, \tilde{x} + r\right].$$

* Par l'inégalité des accroissements finis, si $y, \xi \in \left[\tilde{x} - r, \tilde{x} + r\right]$,

$$\left|\phi(y) - \phi(\xi)\right| \leq \sup_{\mu \in [\tilde{x} - r, \tilde{x} + r]} |\phi'(\mu)| \, |y - \xi| \leq \lambda |y - \xi|$$

et par hypothèse $\lambda < 1$.

Une application contractante de rapport < 1 stabilisant un fermé admet un unique point fixe dans ce fermé.

Redémontrons ce fait : Posons $x_{n+1} = \phi(x_n)$ et $x_0 = \tilde{x}$.

On a, pour tout n,

$$|x_{n+1} - x_n| = |\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|.$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:

$$|x_p - x_q| \leq \underbrace{\sum_{i=p}^{q-1} \lambda^i}_{\leq \sum_{i=p}^{+\infty} \lambda^i = \frac{k^p}{1-k}} |x_0 - x_1| \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

donc :

$$|x_p - x_q| \leq \frac{\lambda^p}{1-k} |x_0 - x_1|.$$

Comme $\lambda < 1$,
la suite x_n est donc de Cauchy et converge vers une limite l qui vérifie, par continuité :

$$\phi(l) = (l).$$

Si l' est un autre point fixe :

$$\Big|\underbrace{\phi(l)}_{=l} - \underbrace{\phi(l')}_{=l}\Big| \leq \lambda |l - l'| \text{ donc}$$

$1 \leq \lambda$ ce qui est faux par hypothèse.

Partie II : Changeons les notations pour plus de clarté. Si note $\mathcal{C}_X^j$ l'ensemble des parties de X à j éléments, on a :

$$s_j(r) = \sum_{P \in \mathcal{C}^j_{\{r_1, \dots, r_n\}}} \left(\prod_{r \in P} r \right)$$

puis :

$$\text{"} s_j(\hat{r}_k) \text{"} = \sum_{P \in \mathcal{C}^j_{\{r_1, \dots, r_n\} \setminus \{r_k\}}} \left(\prod_{r \in P} r \right).$$

1) L'ensemble des parties de $\{r_1, \dots, r_n\}$ à j éléments peut se décomposer en un ensemble de parties contenant r_i en union avec une partie de $\{r_1, \dots, r_n\} \setminus \{r_i\}$ à $j-1$ éléments et un ensemble de parties à j éléments ne contenant pas r_i.

On a : $\left(\nabla S(r)^T \right)_{j, \cancel{i}} = \dfrac{\partial s_j}{\partial r_i}(r)$ et par la considération précédente :
(à noter que le "j" de l'énoncé est mal employé).

$$s_j(r) = \sum_{P \in \mathcal{C}^j_{\{r_1, \dots, r_n\} \setminus \{r_i\}}} \left(\prod r \in P \right) + r_i \sum_{P \in \mathcal{C}^{j-1}_{\{r_1, \dots, r_n\} \setminus \{r_i\}}} \left(\prod_{r \in P} r \right)$$

donc :

$$\frac{\partial s_j}{\partial r_i}(r) = \text{"} s_{j-1}(\hat{r_i}) \text{"}$$

2) Procédons par opérations élémentaires et soustrayons la dernière colonne (numéro n) aux colonnes de 1 à $n-1$. Le coefficient d'indice (j,i) est donc, pour $i<n$ et $j>1$:

$$s_{j-1}(\hat{r}_i) - s_{j-1}(\hat{r}_n)$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{C}^{j-1}_{\{r_1,\dots,r_n\}\setminus\{r_i\}}} \left(\prod_{r\in P} r\right) - \sum_{P \in \mathcal{C}^{j-1}_{\{r_1,\dots,r_{n-1}\}}} \left(\prod_{r\in P} r\right)$$

ce qui donne, comme précédemment en retirant r_n au membre de gauche et r_i au membre de droite :

$$= r_n \sum_{P \in \mathcal{C}^{j-2}_{\{r_1,\dots,r_n\}\setminus\{r_i,r_n\}}} \left(\prod_{r\in P} r\right) + \sum_{P \in \mathcal{C}^{j-1}_{\{r_1,\dots,r_n\}\setminus\{r_i,r_n\}}} \left(\prod_{r\in P} r\right)$$

$$- \left[r_i \sum_{P \in \mathcal{C}^{j-2}_{\{r_1,\dots,r_n\}\setminus\{r_i,r_n\}}} \left(\prod_{r\in P} r\right) + \sum_{P \in \mathcal{C}^{j-1}_{\{r_1,\dots,r_n\}\setminus\{r_i,r_n\}}} \left(\prod_{r\in P} r\right) \right]$$

$$= (r_n - r_i) \underbrace{\sum_{P \in \mathcal{C}^{j-2}_{\{r_1,\dots,r_{n-1}\}\setminus\{r_i\}}} \left(\prod_{r\in P} r\right)}$$

$$= (r_n - r_i)\, s_{j-2}(\hat{r}_i)$$

La première ligne est, quant à elle, constituée de 0 sauf la dernière colonne. Il reste à développer par rapport à celle-ci pour obtenir :

$$\Delta(n, r) = (-1)^{n-1} \left[s_{j-1}(\hat{r}_i) - s_{j-1}(\hat{r}_n) \right]_{1 \leq j, i \leq n-1}$$

ce qui donne,

$$\Delta(n, r) = (-1)^{n-1} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (r_n - r_i) \right] \Delta(n-1, r).$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (r_i - r_n) \quad \Delta(n-1, r)$$

Par récurrence immédiate :

$$\Delta(n, r) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j).$$

3) On a, les relations coefficients-racines :

$$s_j(r) = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}, \quad \text{pour le polynôme } P.$$

Ecrivons ces relations pour :

$$P_j(X) = \prod_{k \neq j} (X - r_k) = X^{n-1} - b_1 X^{n-2} \ldots\ldots (-1)^{n-1} b_{n-1}$$

avec $b_\ell = s_\ell(\hat{r}_j)$

Ainsi :

$$P_j(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_{k-1}(\hat{r_j}) X^{n-k}.$$

On a bien,

$$P_j(r_i) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$P_j(r_j) = \prod_{k \neq j} (r_j - r_k)$$

c'est à dire la relation demandée.

b) Posons :

$$D_{i,j} = \left[\prod_{k \neq j} (r_j - r_k)\right]^{-1} \delta_{i,j} = \left[\prod_{k \neq i} (r_i - r_k)\right]^{-1} \delta_{i,j}$$

On a :

$$\left(V \nabla S(r) D\right)_{i,j}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} V_{i,p} \left[\sum_{q=1}^{n} \overbrace{\nabla S(r)_{p,q} D_{q,j}}^{=0 \text{ si } q \neq j}\right]$$

$$= \sum_{p=1}^{n} V_{i,p} \left(\nabla S(r)\right)_{p,j} D_{j,j}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} r_i^{n-p} s_{p-1}(\hat{r_j}) \Big/ \prod_{k \neq j} (r_j - r_k) \qquad = \delta_{i,j}$$

(question précédente)

Ainsi, $\left(\nabla S(r)\right)^{-1} = DV$, c'est à dire :

$$\left(\nabla S(r)^{-1}\right)_{i,j} = \frac{(-1)^{j-1} r_i^{n-j}}{\prod_{k\neq i}(r_i - r_k)}.$$

4) On peut réécrire de façon concaténée la notation du polynôme P :

$$P(X) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} a_{\ell} X^{n-\ell} \quad \text{avec } a_0 = 1.$$

On rappelle les relations coefficients - racines :

pour tout $\ell \geq 1$, $a_\ell = s_\ell(r)$ (cas particulier $a_0 = 1$),
pour $r = (r_1, \dots, r_n)$ les racines de P.
On a :

$$\varphi_i(r) = r_i - \sum_{\ell=1}^{n} \left(\nabla S(r)\right)_{i,\ell} \left(S(r) - A\right)_{\ell}$$

$$= r_i - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{r_i^{n-\ell}(-1)^{\ell-1}(s_\ell(r) - a_\ell)}{\prod_{k\neq i}(r_i - r_k)}$$

$$= r_i - \left[\prod_{k\neq i}(r_i - r_k)\right]^{-1}\left[\underbrace{-\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell} s_\ell(r)}_{= r_i^n \text{ par la relation coeff.-racines, } \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell} s_\ell(r) r_i^{n-\ell} = 0} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell} a_\ell r_i^{n-\ell}}_{P(r_i) - r_i^n}\right]$$

Finalement $\varphi_i(r) = r_i - \dfrac{P(r_i)}{\prod_{k\neq i}(r_i - r_k)}$.

Partie III :

1) Rappelons le théorème de projection sur un convexe fermé.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et A un sous-ensemble de V non vide, <u>convexe</u> et <u>fermé</u>. Alors, pour tout $a \in V$, il existe un unique $b_* \in A$ tel que :

$$\inf_{b \in A} \|b - a\| = \|b_* - a\|.$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur V.

Cet inf est donc par ailleurs un min atteint en b_*.

Montrons que $Q(y, u)$ est convexe pour tous y, u.

Soient $B_1, B_2 \in Q(y, u)$ et $t \in [0, 1]$. On a :

$$(tB_1 + (1-t)B_2)u = (1-t)y + ty = y.$$

$Q(y, u)$ est également fermé car si $B_n \xrightarrow{\in Q(y,u)} B \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$B_n u = y \longrightarrow Bu = y \text{ donc } B \in Q(y, u).$$

Ainsi, il existe une unique matrice $B_* \in Q(y_k, u_k)$ vérifiant :

$$|||B_* - A_k|||^2 = \min_{B \in Q(y_k, u_k)} |||B - A_k|||^2.$$

Montrons que $B_* = A_{k+1}$. D'une part, $A_{k+1} \in Q(y_k, u_k)$ car :

$$A_{k+1} u_k = A_k u_k + \frac{(y_k - A_k u_k)\cancel{u_k^t u_k}}{\cancel{u_k^t u_k}} = y_k.$$

(le cas $u_k = 0$ est évident à nouveau)

D'autre part, $\langle M, N \rangle = \mathrm{tr}({}^tM N) = \mathrm{tr}(N\, {}^tM)$ étant un produit scalaire, on a :

$$|||B - A_k|||^2 = |||A_{k+1} - A_k|||^2 + |||B - A_{k+1}|||^2 + \langle B - A_k, A_{k+1} - A_k \rangle$$

Calculons ce dernier terme :

$$\langle B - A_k, A_{k+1} - A_k \rangle = \mathrm{tr}\left[\frac{(y_k - A_k u_k)}{u_k^t u_k} u_k^t \left[B - A_k - \frac{(y_k - A_k u_k)}{u_k^t u_k}\right]^t\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[\frac{(y_k - A_k u_k)}{u_k^t u_k}\left[\underbrace{B u_k}_{y_k} - A_k u_k - (y_k - A_k u_k)\frac{\cancel{u_k^t u_k}}{\cancel{u_k^t u_k}}\right]^t\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[\frac{(y_k - A_k u_k)}{u_k^t u_k}\left[(y_k - A_k u_k) - (y_k - A_k u_k)\right]^t\right]$$

$$= 0$$

Ainsi,

$$|||B - A_k|||^2 = |||A_{k+1} - A_k|||^2 + |||B - A_{k+1}|||^2 \geq |||A_{k+1} - A_k|||^2$$

Comme $A_{k+1} \in Q(y_k, u_k)$, A_{k+1} réalise bien le minimum.

Par unicité de B_*, $A_{k+1} = B_*$.

2) a) Appliquons l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1. Soient $x, y \in O$. On a :

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \underbrace{\nabla f}_{\text{notation pour la différentielle}}(y + t(x-y))(x-y)\,dt$$

qui donne :

$$f(x) - f(y) - \nabla f(x_*)(x-y) = \int_0^1 [\nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(x_*)](x-y)\,dt.$$

On obtient la majoration :

$$\|f(x)-f(y)-\nabla f(x_*)(x-y)\|_2$$
$$\leq \int_0^1 |||\nabla f(y+t(x-y))-\nabla f(x_*)|||_2 \, \|x-y\|_2 \, dt$$

Or, par hypothèse, pour $t\in[0,1]$:

$$|||\nabla f(y+t(x-y))-\nabla f(x_*)|||_2 \leq \sigma \|y+t(x-y)-x_*\|_2$$

et $\quad y+t(x-y)-x_* = t(x-x_*)+(1-t)(y-y_*)$ qui donne :

$$\|f(x)-f(x)-\nabla f(x_*)(x-y)\|_2 \leq \sigma\|x-y\|_2 \int_0^1 \left(t\,\|x-x_*\|+(1-t)\cancel{\|y-x_*\|}\right)dt$$

c'est à dire, en intégrant :

$$\|f(x)-f(y)-\nabla f(x_*)(x-y)\|_2 \leq \sigma \frac{\|y-x_*\|_2+\|x-x_*\|}{2}\|y-x\|_2 .$$

b) On note $\rho(M)=\sup\{|\lambda| \mid \lambda$ est valeur propre de $M\}$.

b) Redémontrons que $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tBB)} = \sqrt{\rho(B\,{}^tB)}$.

Les matrices ${}^tBB$ et $B\,{}^tB$ sont symétrique et positives.

Il existe $x\neq 0$ tel que : ${}^tBBx=\rho({}^tBB)x$. Supposons que $\rho({}^tBB)\neq 0$. On a $Bx\neq 0$ car :

$$({}^tBBx \mid x) = \|Bx\|_2 = \rho({}^tBB)\|x\|_2 .$$

De plus :

$$(B\,{}^tB)(Bx) = B\left(\rho({}^tBB)x\right) = \rho({}^tBB)\,Bx \text{ donc}$$

$\rho({}^tBB)$ est valeur propre de $B\,{}^tB$ et $\rho({}^tBB)\leq\rho(B\,{}^tB)$.

Si $\rho({}^tBB)=0$, les valeurs propres de B sont nulles puisque si λ est valeur propre de B, $|\lambda|^2$ est valeur propre de ${}^tBB$.

Ainsi B est nilpotente donc $B = P^{-1} T P$, $T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$
puis ${}^tB = {}^tP\, {}^tT\, {}^tP^{-1}$ donc les valeurs propre de ${}^tB$ sont toutes nulles. $\rho(B\,{}^tB) = 0$.
Ainsi, dans tous les cas : $\rho({}^tB B) \leq \rho(B\,{}^tB)$. Par symétrie $\rho({}^tBB) = \rho(B\,{}^tB)$.

Montrons que $\|B\|_2^2 = \rho({}^tBB)$. On diagonalise ${}^tBB$:

$${}^tBB = P^T D P \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ et où $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

On a $\rho({}^tBB) = \lambda_n$ et :

$$\|Bx\|_2^2 = (Bx|Bx) = ({}^tBBx|x) = (P^TDPx|x)$$
$$= (DPx|Px)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Px)_i$$
$$\leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} (Px)_i$$
$$\leq \lambda_n \underbrace{\|Px\|_2^2}_{= \|x\|_2 \text{ car } P \text{ est orthogonale.}}$$

Ainsi, pour tout x :

$$\frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\lambda_n} \text{ puis } |||B|||_2 \leq \sqrt{\lambda_n}.$$

L'égalité est réalisée pour un vecteur propre x associé à λ_n :

$$\|Bx\|_2 = \lambda_n \|x\|_2.$$

Finalement : $|||B|||_2 = \sqrt{\rho({}^tBB)} = \sqrt{\rho(B\,{}^tB)}$.

Revenons à l'inégalité à démontrer et utilisons le fait que $tr(MN) = tr(NM)$:

$$tr({}^t(AB)\,AB) = tr({}^tB({}^tAA)B) = tr(({}^tAA)(B\,{}^tB)).$$

Diagonalisons à nouveau $B\,{}^tB$:

$$B\,{}^tB = PD\,{}^tP \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a : $\rho(D) = \rho({}^tBB)$ puis :

$$\sqrt{tr\left({}^t(AB)(AB)\right)} = \sqrt{tr\left({}^t(AP)\,AP\;D\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left({}^t(AP)(AP)\right)_{i,i}\,\lambda_i}$$
$$\leqslant \sqrt{\rho(D)}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left({}^t(AP)(AP)\right)_{i,i}}$$

donc :

$$|||AB||| \leqslant \sqrt{\rho(D)}\,\sqrt{tr\left({}^t(AP)\,AP\right)} = \sqrt{\rho(D)}\,\sqrt{\underbrace{tr\left(P\,({}^tAA)P\right)}_{=tr\left({}^tAA\,(\underbrace{P\,{}^tP}_{=I})\right)}}$$

puis :

$$|||AB||| \leqslant \sqrt{\rho(D)}\,\sqrt{|||A|||} = \sqrt{\rho({}^tBB)}\,|||A||| = |||B|||_2\,|||A|||.$$

c) On a :

$$A_{k+1} - \nabla f(x_*) = A_k - \nabla f(x_*) + \frac{(y_k - A_k u_k)\,u_k^t}{u_k^t u_k} \quad \text{donc :}$$

$$A_{k+1} - \nabla f(x_*) = \left(A_k - \nabla f(x_*)\right)\left(I_n - \frac{u_k u_k^t}{u_k^t u_k}\right)$$
$$+ \frac{y_k - \cancel{A_k u_k}\, u_k^t}{u_k^t u_k} + \cancel{\frac{A_k u_k u_k^t}{u_k^t u_k}}$$
$$- \nabla f(x_*)\,\frac{u_k u_k^t}{u_k^t u_k}$$

On majore donc : $\dfrac{1}{u_k^t u_k}\left(y_k\, u_k^t - \nabla f(x_*)\, u_k u_k^t\right)$.

On a $u_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ et on applique 2) a) avec $x = x_{k+1}$, $y = x_k$ pour avoir :

$$\|y_k - \nabla f(x_*)u_k\|_2 \leqslant \frac{\sigma}{2}\left[\|x_{k+1} - x_*\|_2 + \|x_k - x_*\|_2\right]\|x_{k+1} - x_k\|_2$$
$$= \frac{\sigma}{2}\left[\|e_{k+1}\|_2 + \|e_k\|_2\right]\|u_k\|_2$$

De plus, pour tous vecteurs u, v :

$$|||v\,u^t||| = \sqrt{tr\left((v u^t)^t v u^t\right)} = \sqrt{tr\left(u v^t v u^t\right)}$$
$$= \|v\|_2 \sqrt{tr\left(u u^t\right)}$$

Or $tr\left(u u^t\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \|u\|_2^2$ donc :

$|||v\,u^t||| = \|v\|_2 \, \|u\|_2$ puis, en prenant $v = y_k - \nabla f(x_*) u_k$ et $u = u_k^t$, on a :

$$|||\frac{1}{u_k^t u_k} y_k u_k^t - \nabla f(x_*) u_k u_k^t|||$$
$$= \frac{1}{\|u_k\|_2^{\cancel{2}}} \|y_k - \nabla f(x_*)\|_2 \cancel{\|u_k\|_2}$$
$$\leq \frac{\sigma}{2}\left[\|e_{k+1}\|_2 + \|e_k\|_2\right]$$ ce qui donne, pour l'inégalité triangulaire :

$$|||A_{k+1} - \nabla f(x_*)||| \leq |||\left(A_k - \nabla f(x_*)\right)\left[I_n - \frac{u_k u_k^t}{u_k^t u_k}\right]|||$$
$$+ \frac{\sigma}{2}\left[\|e_{k+1}\|_2 + \|e_k\|_2\right].$$

La matrice $\Pi = I_n - \frac{u_k u_k^t}{\|u_k\|_2^2}$ est la matrice de projection sur $\frac{u_k}{\|u_k\|_2}$ car :

$$\Pi x = x - \left(\frac{u_k}{\|u_k\|_2} \Big| x\right) \frac{u_k}{\|u_k\|_2}.$$ donc :

$\|\Pi x\|_2 \leq \|x\|_2$ puis $|||\Pi|||_2 \leq 1$.

On applique 2) b) pour avoir :

$$|||A_k - \nabla f(x_*)\left(I_n - \frac{u_k u_k^T}{\|u_k\|_2^2}\right)|||$$

$$\leq |||A_k - \nabla f(x_*)|||\;|||P|||_2 \leq |||A_k - \nabla f(x_*)|||.$$

3) a) i) On applique l'inégalité de la question 2)c) :

$$|||A_i - \nabla f(x_*)||| \leq \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)\delta + \frac{\sigma}{2}\|e_{i-1}\|\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Or, $\|e_{i-1}\| \leq \frac{1}{2^{i-1}}\|e_0\|$ par récurrence immédiate donc

$$\|e_{i-1}\| \leq \frac{1}{2^{i-1}}\varepsilon$$

On a donc :

$$|||A_i - \nabla f(x_*)||| \leq \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)\delta + \frac{\overbrace{\sigma \quad \tfrac{3\varepsilon}{2}}^{\leq \delta}}{2^i}$$

et $\left(2 - \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^i}\right)\delta = \left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\left[1 - \frac{1}{2}\right]\right) = 2 - \frac{1}{2^i}$,

ce qui donne :

$$|||A_i - \nabla f(x_*)||| \leq \left(2 - \frac{1}{2^i}\right)\delta.$$

Posons $B = I_n - \nabla f(x_*)^{-1}A_i$. On a :

$$|||B||| \leq |||\nabla f(x_*)^{-1}|||\;|||\nabla f(x_*) - A_i|||$$

$$\leq \beta\delta\left(2 - \frac{1}{2^i}\right) \leq \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{2^i}\right) \leq \frac{1}{3} < 1.$$

Ainsi, la série : $\sum_{j \geq 0} B^j$ converge et $I_n - B$ est inversible.

$$(I_n - B)^{-1} = \sum_{j \geq 0} B^j$$