Corrigé concours 3 A
analyse numérique
2008

Partie I :

1) A est linéaire par linéarité de l'intégrale.

De plus, comme K est continue sur $[-1,1]\times[-1,1]$:

$$\|A\varphi\| \leqslant \underbrace{2\sup_{x,y\in[-1,1]^2}|K(x,y)|}_{=M}\ \|\varphi\| = M\|\varphi\|$$

donc A est continu.

2) On a, plus précisément, pour $x\in[-1,1]$:

$$|A\varphi(x)| \leqslant \int_{-1}^{1}|K(x,y)|\,dy\ \|\varphi\| \quad \text{donc :}$$

$$\|A\varphi\| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]}\int_{-1}^{1}|K(x,y)|\,dy\ \|\varphi\| \quad \text{puis,}$$

$$\|A\| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]}\int_{-1}^{1}|K(x,y)|\,dy.$$

Par théorème sur les intégrales à paramètres, la fonction :

$$\Phi : x \longmapsto \int_{-1}^{1}|K(x,y)|\,dy \text{ est continue.}$$

Elle atteint donc sa borne supérieure sur $\overset{\text{compact}}{[0,1]}$ en un point x_0 : $\displaystyle\int_{-1}^{1}|K(x_0,y)|\,dy = \sup_{x\in[-1,1]}\int_{-1}^{1}|K(x,y)|\,dy$.

Posons : $\displaystyle \varphi_n(y) = \frac{n\,K(x_0,y)}{n|K(x_0,y)|+1}$

La fonction φ_n est continue et, pour tout y :

$$|\varphi_n(y)| = \frac{n|K(x_0,y)|}{n|K(x_0,y)|+1} \leqslant 1 \text{ donc}$$

$$\|\varphi_n\| \leqslant 1.$$

Comme la fonction 1 est intégrable sur $[-1,1]$,

et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(y) = \begin{cases}\dfrac{K(x_0,y)}{|K(x_0,y)|} & \text{si } K(x_0,y)\neq 0\\ 0 & \text{si } K(x_0,y)=0\end{cases}$

pour tout $y\in[-1,1]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$A\varphi_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-1}^{1}|K(x_0,y)|\,dy$$

car $\left.\begin{cases}\dfrac{(K(x_0,y))^2}{|K(x_0,y)|} & \text{si } K(x_0,y)\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\right\} = |K(x_0,y)|$ pour tout y.

Ainsi, comme $\|A\varphi_n\| \geqslant |A\varphi_n(x_0)|$

$$\|A\varphi_n\| \geqslant \int_{-1}^{1}|K(x_0,y)|, \text{ puis comme } \|\varphi_n\|\leqslant 1,$$

$$\|A\| \geqslant \|A\varphi_n\| \geqslant |A\varphi_n(x_0)| \longrightarrow \int_{-1}^{1}|K(x_0,y)|\,dy.$$

Finalement,

$$\|A\| = \int_{-1}^{1} |K(x_0, y)|\, dy = \sup_{x\in[1,1]} \int_{-1}^{1} |K(x,y)|\, dy .$$

3) On rappelle le théorème de Heine :

Si X est métrique compact, Y métrique et $K : X \to Y$ une application continue. Alors K est uniformément continue sur X.

Soit $\varepsilon > 0$. On applique le théorème de Heine à K, $X = [-1, 1]^2$, $Y = \mathbb{R}$ et la norme 1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$\exists \delta > 0, \ \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1 \leq \delta \Rightarrow |K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2)| \leq \varepsilon .$$

On a, pour $y = y_1 = y_2$ et $|x_1 - x_2| \leq \delta$:

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq \varepsilon .$$

Soit B une partie bornée de $\mathcal{C}(-1, 1)$, $\forall f \in B$, $\|f\| \leq M < \infty$.

Ainsi, pour $|x_1 - x_2| \leq \delta$ et $f \in B$, $\|f\|_\infty \leq M < \infty$,

$$|Af(x_1) - Af(x_2)| = \left| \int_{-1}^{1} (K(x_1, y) - K(x_2, y))\, f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |K(x_1, y) - K(x_2, y)|\, dy\, \|f\|_\infty$$

$$\leq 2M\varepsilon$$

Ainsi $A(B)$ est une partie équicontinue.

Par définition d'un opérateur compact, A est un opérateur compacte.

4) On définit $B(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \varphi$.

Cette série converge absolument, car $\|\cdot\|$ étant une norme subordonnée :

$$\|A^n \varphi\| \leq \|A^n\| \|\varphi\| \leq \|A\|^n \|\varphi\|$$

et $\|A\| = \sup_{x\in[1,1]} \int_{-1}^{1} |K(x,y)|\, dy < 1$.

Ainsi, la série $B(\varphi)$ converge absolument.

On a :

$$\left((I - A) \circ \sum_{k=0}^{N} A^n \right)(\varphi) = \varphi - A^{N+1}(\varphi) = \left(\sum_{k=0}^{N} A^n \circ (I-A) \right)(\varphi)$$

ce qui donne, par continuité de A, en passant à la limite, puisque $\|A^{N+1}\varphi\| \leq \|A\|^{N+1} \|\varphi\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$,

$[B \circ (I-A)](\varphi) =$
$[(I-A) \circ B](\varphi) = \varphi$ c'est à dire $I - A$ est inversible et $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

On a :

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \leq \frac{1}{1 - \|A\|} .$$

car $\|A\| < 1$.